Zählen in der Höheren Algebra

Tobias Barthel

Zusammenfassung: Die Höhere Algebra befasst sich mit der Erweiterung der ganzen Zahlen um neuartige Bereiche des Zählens, den sogenannten stabilen Homotopiegruppen der Sphären, die reichhaltige Informationen über algebraische, geometrische und topologische Objekte kodieren. Die Bestimmung dieser Gruppen erweist sich als ein grundlegendes und ungemein schwieriges Problem der Mathematik. In diesem Beitrag beschreiben wir den chromatischen Zugang zu diesem Problem und die Verbindung mit der arithmetischen Geometrie, die die Bestätigung einer 50 Jahre alten Vorhersage erlaubt.

Abstract: Higher algebra is concerned with the extension of the integers to novel domains of counting, the so-called stable homotopy groups of spheres, that encode rich information about algebraic, geometric, and topolopical objects. Determining these groups turns out to be a fundamental and incredible difficult problem in mathematics. In this contribution, we describe the chromatic approach to this problem and the connection with arithmetic geometry, which allows the confirmation of a 50 year old prediction.

Am Anfang der Algebra steht das Zählen. Dies bewegt sich im Bereich der ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, die verbunden sind durch die Grundrechenarten Addieren und Multiplizieren. Mathematiker nennen eine solche Struktur einen Ring und geben ihm im Falle der ganzen Zahlen das Symbol $\mathbb{Z}$. Abstrakt können wir uns jede Zahl vorstellen als repräsentiert durch eine Menge von ebenso vielen Punkten; beispielsweise:

$$4 \longleftrightarrow \{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\}$$

Dies veranschaulicht die Idee, dass jede Zahl mit einer zusätzlichen Struktur versehen werden kann, nämlich der Wirkung einer Symmetriegruppe, die die Punkte in obiger Darstellung permutiert. Denkt man diesen Ansatz konsequent zu Ende, so führt dies zu einem neuartigen Objekt, dem *Sphärenspektrum* $\mathbb{S}$, das grob gesprochen alle zusätzlichen Symmetrien der ganzen Zahlen in sich vereint. Neben den ganzen Zahlen erschließen sich damit unendlich viele weitere Bereiche des Zählens, die *stabilen Homotopiegruppen der Sphären*,

$$\pi_0\mathbb{S} = \mathbb{Z}, \quad \pi_1\mathbb{S}, \quad \pi_2\mathbb{S}, \quad \ldots,$$

auf die wir im nächsten Abschnitt näher eingehen werden. Des Weiteren ist $\mathbb{S}$ mit einer höheren Ringstruktur versehen, es ist also wiederum möglich, Elemente zu addieren und zu multiplizieren. Mit anderen Worten, *Höhere Algebra* ist Algebra über dem Sphärenspektrum.

Höhere Algebra

Doch was genau wird hier eigentlich gezählt? Erstaunlicherweise hängt die Antwort davon ab, in welchem Teilgebiet der Mathematik wir uns befinden. So repräsentiert ein Element von $\pi_d\mathbb{S}$ beispielsweise für einen Topologen eine Abbildung $S^{d+k} \to S^k$ zwischen höherdimensionalen Kugeloberflächen, während ein Geometer vermöge des Pontryagin–Thom Satzes stattdessen eher an die geometrischen Lösungsmengen (bis auf Vielfache) von Systemen von Gleichungen in mehreren Unbekannten denken mag. Darüber hinaus gibt es Querverbindungen in die physikalische Theorie der kondensierten Materie oder zur arithmetischen Geometrie. Somit erweist sich das Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ und seine stabilen Homotopiegruppen $\pi_d\mathbb{S}$ als ein fundamentales Objekt der modernen Mathematik.

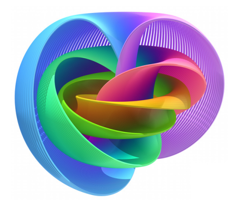

Abbildung 1: Die Hopffaserung $S^3 \to S^2$, ein Element von $\pi_1\mathbb{S}$.

Das führt nun auf natürlichem Wege zu der grundlegenden Frage, wie sich diese neuartigen Zahlbereiche $\pi_d\mathbb{S}$ beschreiben lassen und inbesondere, wie groß sie sind. In einer bahnbrechenden Arbeit von 1951 zeigte Serre, der dafür 1954 mit der Fieldsmedaille—dem Nobelpreis der Mathematik—ausgezeichnet wurde, dass die Anzahl $\#\pi_d\mathbb{S}$ für positive $d > 0$ stets endlich ist. Die genauen Werte zu bestimmen stellt sich allerdings als unfassbar schwierig heraus, sodass seit ihrer Konstruktion vor knapp 90 Jahren lediglich die ersten 90 stabilen Homotopiegruppen der Sphären berechnet wurden, siehe [1] für den gegenwärtigen Stand der Forschung. Im Gegensatz zu vielen anderen grundlegenden Größen der Mathematik offenbart

Anzahl der Elemente in $\pi_d\mathbb{S}$													
d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\#\pi_d\mathbb{S}$	∞	2	2	24	0	0	2	240	4	8	6	504	0

Abbildung 2: Tabelle der Größe der stabilen Homotopiegruppen der Sphären für $0 \leq d \leq 12$.

sich hier auf den ersten Blick kein offensichtlich erkennbares Muster, und auch die Erfahrung der Experten bestätigt diesen Eindruck.

Ordnung im Chaos

Bei erneuter und genauerer Betrachtung obiger Tabelle lassen sich allerdings doch bestimmte Phänomene ablesen. Beispielsweise können wir uns fragen, ab wann $\#\pi_d\mathbb{S}$ zum ersten Mal durch eine gegebene Primzahl p teilbar ist. So sehen wir, dass Teilbarkeit durch 2 zuerst für $d = 1$ auftritt, Teilbarkeit durch 3 für $d = 3$, Teilbarkeit durch 5 für $d = 7$ und Teilbarkeit durch 7 für $d = 11$. Daraus lässt sich die Vermutung ableiten, dass im Allgemeinen Teilbarkeit von $\#\pi_d\mathbb{S}$ durch p zum ersten Mal für $d = 2p - 3$ auftritt.

Ohne die genauen Werte von $\#\pi_d\mathbb{S}$ zu kennen, wurde diese Vermutung von Mathematikern Ende der 1960er Jahre für alle Primzahlen bewiesen. Dieser Satz steht am Beginn einer fulminanten Entwicklung in den Folgejahrzehnten, die als *chromatische Homotopietheorie* bezeichnet wird. Dabei vollzieht sich ein Paradigmenwechsel: Anstatt die Werte von $\#\pi_d\mathbb{S}$ für spezifisches d auszurechnen, halten wir Ausschau nach wiederkehrenden Mustern, wie im eben angeführten Beispiel. Grob gesprochen zerlegt die chromatische Perspektive das Sphärenspektrum $\mathbb{S}$ in unzerlegbare periodische Familien von Elementen, so wie ein optisches Prisma Licht in seine Spektralfarben zerlegt. Jede Farbe korrespondiert dabei zu einer Welle mit einer bestimmten Wellenlänge f, und genauso lassen sich die Elemente von $\mathbb{S}$ derselben Periodizität $f(h) = 2p^h - 2$ für eine gegebene Primzahl p in ein neues Objekt versammeln, nämlich das *lokale Sphärenspektrum* $\mathbb{S}(h)_p$, das nun ein hohes Maß an Regularität aufweist.

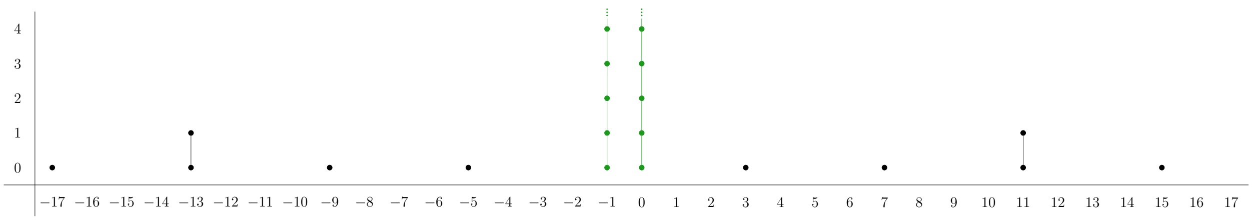

Abbildung 3: Illustration von $\pi_d\mathbb{S}(1)_3$ im Bereich $-17 \leq d \leq 17$. In grün sind die Türme dargestellt, um die das Bild spiegelsymmetrisch ist.

Die chromatische Homotopietheorie hat sich mittlerweile nicht nur als wichtigstes Instrument zur Organisation der reichhaltigen Informationen, die in $\pi_d\mathbb{S}$ enthalten sind, etabliert, sondern stellt auch die besten Mittel zur Berechnung derselben bereit. Wiederum gibt es nun für jede Periodizität $f(h)$ und jede ganze Zahl d eine lokale stabile Homotopiegruppe $\pi_d\mathbb{S}(h)_p$, die sich als die Atome von $\pi_d\mathbb{S}$ denken lassen. Eine herausragende Rolle kommt dabei denjenigen Werten von d zuteil, für die $\pi_d\mathbb{S}(h)_p$ Elemente beliebig großer Ordnung enthält: Im Gegensatz zu $\pi_d\mathbb{S}$ kann dies durchaus für $f(h) > 0$ und negative Werte von d passieren. Diese unendlichen Türme sind Ankerpunkte für wichtige Symmetrien und erlauben es, die verschiedenen $\mathbb{S}(h)_p$ wieder zu $\mathbb{S}$ zusammenzufügen, also den Zerlegungsprozess rückgängig zu machen.

Von der Zahlentheorie zur Homotopietheorie und zurück

Inspiriert durch Ergebnisse aus der Zahlentheorie formulierte Morava Anfang der 1970er Jahre ein wegweisendes Programm [2], dessen Ziel es ist, die Struktur der lokalen Sphärenspektren $\mathbb{S}(h)_p$ zu beschreiben. Moravas revolutionäre Ideen, die erst 1985 publiziert und maßgeblich von Hopkins weiterentwickelt wurden, beinhalten an zentraler Stelle eine Vorhersage, an welchen Stellen genau die unendlichen Türme in $\mathbb{S}(h)_p$ auftreten und dass es davon genau 2^h viele gibt.

Diese Prognose deckt sich mit den Arbeiten von Serre (1951, $h = 0$) und Ravenel (1984, $h = 1$, siehe **Abbildung 3**). Dank der gemeinsamen, knapp drei Jahrzehnte andauernden Bemühungen etlicher Mathematiker, die insgesamt mehrere hundert Seiten subtiler Rechnungen umfassen, konnte Moravas Vorhersage dann 2022 für $h = 2$ verifiziert werden, kulminierend in einem Artikel [3] von Beaudry, Goerss und Henn. An dieser Stelle schien es fraglich, ob der Fall $h = 3$ im Rahmen der gegenwärtigen Methodik überhaupt bestätigt werden könnte.

Hier setzt nun meine Kollaboration mit Schlank, Stapleton und Weinstein an: Zunächst übersetzen wir Moravas Vorhersage in ein Problem der Zahlentheorie, genauer der p-adischen arithmetischen Geometrie. Dort stehen nun komplett andere Werkzeuge zur Verfügung als in der Homotopietheorie, von der wir ausgegangen sind. Insbesondere erlaubt uns die *integrale p-adische Hodgetheorie* [4], die in den letzten Jahren von Bhatt, Morrow und Scholze (MPIM, Fieldsmedaille 2018) entwickelt wurde, genug Kontrolle zu gewinnen, um das Problem dank früherer Arbeiten [5] von Faltings (MPIM, Fieldsmedaille 1986) mit einem verwandten, aber simpleren Problem in Verbindung zu bringen. Letzteres können wir lösen und damit auch Moravas ursprüngliche Vorhersage über die Position unendlicher Türme in $\mathbb{S}(h)_p$ in vollständiger Allgemeinheit für alle $h \geq 0$ beweisen.

Abgesehen von den eingangs erwähnten unmittelbaren Konsequenzen für die chromatische Homotopietheorie eröffnet sich damit eine neue Perspektive auf die Höhere Algebra, indem sie diese viel enger mit moderner p-adischer Geometrie und deren mächtigen Methoden verknüpft. Es ist zu erwarten, dass der fruchtbare Austausch zwischen den Gebieten in beide Richtungen verlaufen wird, möglicherweise als Beginn einer vereinheitlichten Theorie des höheren Zählens.

Literatur

[1] Daniel C. Isaksen, Guozhen Wang, and Zhouli Xu. Stable homotopy groups of spheres: from dimension 0 to 90. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 137:107–243, 2023.

[2] Jack Morava. Noetherian localisations of categories of cobordism comodules. *Ann. of Math. (2)*, 121(1):1–39, 1985.

[3] Agnès Beaudry, Paul G. Goerss, and Hans-Werner Henn. Chromatic splitting for the $K(2)$-local sphere at $p = 2$. *Geom. Topol.*, 26(1):377–476, 2022.

[4] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. Integral p-adic Hodge theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 128:219–397, 2018.

[5] Gerd Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.